MATHÉMATIQUES

Baccalauréat de l'enseignement général
Madagascar
Session 2002

MATHEMATIQUES – Série : C

N.B. : Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.

EXERCICE 1 (**4 points**)

Dans le plan orienté ($\mathscr{P}$), on considère le rectangle ABCD tel que AD = 2AB = 4 et mes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$

Soit I le milieu du segment [BC] et (C) le cercle de centre B passant par A.

1°- a)– Déterminer le barycentre du système de points pondérés {(A,1), (C,1), (D, – 1)}(0,25 pt)

b)– On considère l'ensemble (E_k) des points M du plan ($\mathscr{P}$) tels que ÈMAÈ^2+ÈMCÈ^2– ÈMDÈ^2= k.
Calculer le réel k pour que (E_k) soit le cercle (C). (0,50 pt)

2°- Soit S la similitude plane directe qui transforme A en I et B en D et soit σ la symétrie orthogonale d'axe (BD).
On se propose dans cette question de déterminer géométriquement les éléments caractéristiques de S.

a) – Déterminer et construire l'image (C') du cercle (C) par S. (0,25 pt)

b) – Soit Ω le point d'intersection de (C) et (C ') autre que I. Montrer que (DB) est la médiatrice du segment [ΩI] et que Ω = σ (I). (0,50 pt)

c) – En déduire que mes $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega D})$ =mes $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IB})$ et que $\frac{\Omega D}{\Omega B} = \frac{ID}{IB}$. (0,25 pt)

d) – En utilisant le triangle rectangle isocèle ICD et le point B, calculer la mesure de l'angle ($\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IB}$) et le rapport . $\frac{ID}{IB}$

(0,50 pt)

e) – En déduire le centre, le rapport et l'angle de S. (0,25 pt)

3° - On rapporte maintenant le plan ($\mathscr{P}$) au repère orthonormé direct (A ; $\vec{u}, \vec{v}$) où $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ et $\vec{v} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

a) – Déterminer les affixes des points A, B, D et I. (0,50 pt)

b) – Donner l'expression complexe de S et préciser ses éléments caractéristiques. (0,50 pt)

c) – Donner l'expression complexe de σ et montrer que l'image par σ du point I est le centre Ω de S. (0,50 pt)

EXERCICE 2 (**4 points**)

1°- a) – Résoudre dans 9 x 9 l'équation 11x – 8y = 1. (0,50 pt)

b) – Calculer PGCD (319, 232, 145) puis résoudre dans 9 x 9 l'équation 319x – 232y = 145. (1,00 pt)

2° - Une urne contient 81 boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 81. L'épreuve Econsiste à tirer au hasard et successivement deux boules de l'urne, sans remettre dans l'urne la boule tirée.

a) – Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Tirer deux boules portant deux numéros pairs ». (0,50 pt)

B : « Tirer deux boules portant deux numéros multiples de 3 ». (0,50 pt)

C : « Tirer deux boules portant deux numéros qui sont des nombres premiers ». (0,50 pt)

3° Le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé. On donne les deux droites (D_1) d'équation $11x - 8y - 1 = 0$ et (D_2) d'équation $319x - 232y - 145 = 0$. (On ne demande pas de construire ces deux droites).
A l'épreuve E décrit précédemment, on associe le point M(x, y) du plan où x est le numéro porté par la première boule tirée et y par la seconde. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

D : « Le point M appartient à la droite (D_1) ». (0,50 pt)

E : « Le point M n'appartient pas à la droite (D_2) ». (0,50 pt)

PROBLEME **(12 points)**

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x-1}{\ln|x|} & \text{si } x < 0 \\ (x+1)^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

On note ($\mathcal{C}$) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 1 cm.

Partie A]

1° - Etudier la continuité et la dérivabilité de f en O. (0,25+0,5pt)

2° - On considère la fonction g définie sur $]-\infty ; 0[$ par $g(x) = 1 - x + x \ln|x|$.

a) – Etudier les variations de g. (0,75 pt)

b) – Montrer qu'il existe un réel unique $\alpha \in]-4 ; -3[$ tel que $g(\alpha) = 0$. (0,25 pt)

c) – En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x. (0,25 pt)

3° - a) – Montrer que pour tout $x < 0$, $x \neq -1$, $f'(x)$ a le même signe que $-g(x)$. (0,50 pt)

b – Vérifier que $f'(\alpha) = 0$ et que $f(\alpha) = 1 + \alpha$ où α est défini dans 2°/b). (0,25 pt)

c – Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. (1,25 pt)

4° - a) – Etudier les branches infinies de ($\mathcal{C}$). (0,50 pt)

b) – Calculer à 10^{-1} près : $f(-8)$, $f(-6)$, $f(-2)$ et $f(-\ \ )$. (0,50 pt)

c) – Prendre $\alpha = -3,6$ et construire la courbe ($\mathcal{C}$). (0,50 pt)

On donne : $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 6 \approx 1,8$; $e \approx 2,7$.

Partie B]

1° - On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y' - 2y = e^{-x}(-6x - 4)$.

a) – Vérifier que la fonction φ définie sur 3 par $\varphi(x) = e^{-x}(x^2 + 2x)$ est solution de (E). (0,50 pt)

b) – Montrer qu'une fonction numérique f est solution de (E) si et seulement si $f - \varphi$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y'' - y' - 2y = 0$. (0,25 pt)

c) – Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E). (0,50 pt)

d) – Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$. (0,50 pt)

2° - On pose $I\lambda = \displaystyle\int_0^{\lambda} (x+1)^2 e^{-x}\,dx$ où $\lambda > 0$.

a) – Par deux intégrations par parties successives, exprimer $I\lambda$ en fonction de λ. Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} I\lambda$. (1,25+0,25pt)

b) – En déduire, en cm^2, l'aire du domaine plan (D) ensemble des points M(x,y) tels que $x \geq 0$ et $0 \leq y \leq f(x)$. (0,25 pt)

Partie C]

On se propose d'étudier la convergence de la suite $(U_n)_n$ ∈Ð* définie par :

$\forall\, n \in IN^*$, $$U_n = \frac{1}{n^3}\left[(1+n)^2 e^{-\frac{1}{n}} + (2+n)^2 e^{-\frac{2}{n}} + \ldots + (n+n)^2 e^{-\frac{n}{n}}\right].$$

1° - Vérifier que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) =$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = U_n + \frac{e-4}{ne}$ (f étant définie dans la partie A], $x \geq 0$). (1pt)

2° a) –Soit $n \in IN^*$ et k un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$. Vérifier que $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \subset [0,1]$. (0,25 pt)

b) – En utilisant le sens de variation de f sur [0 , 1], montrer que : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$. (0,50 pt)

c) – En déduire que $U_n + \frac{e-4}{ne} \leq \int_0^1 f(t)dt \leq U_n$ et que $I1 \leq U_n \leq I1 + \frac{4-e}{ne}$. (0,5+0,25 pt)

d) – Montrer que (U_n) n ∈ Ð* est convergente et donner sa limite. (0,50 pt)