MATHÉMATIQUES

MATHEMATIQUES - Série D - SESSION 2004

N.B. : - Les DEUX exercices et le PROBLEME sont obligatoires.

- Machine à calculer autorisée.

EXERCICE 1 (5 points)

1°) Résoudre dans C l'équation d'inconnue Z . *(1pt)*

$Z^2 - (4 + 5i)Z - 1 + 7i = 0$.

2°) Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{u}, \vec{v}$) (unité 1cm). On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $Z_A = 1+i$; $Z_B = 3+4i$ et $Z_C = 4 - i$.

a/ Déterminer l'expression complexe associée à la similitude plane directe S telle que :

S(A) = B et S(B) = C. *(1pt)*

b/ Préciser les éléments caractéristiques de S. *(0,75pt)*

3°) On note par I le milieu du segment [B C].

a/ Calculer l'affixe Z_I de I. *(0,25pt)*

b/ Placer les points A , B , C et I dans le plan complexe (P) *(0,5pt)*

c/ Déterminer et construire l'ensemble ( ) des points M d'affixe Z vérifiant : $\left| z - \frac{7+3i}{2} \right| = \frac{\sqrt{26}}{2}$.

(1pt)

d/ Déterminer et construire l'ensemble (') image de ( ) par S. *(0,5pt)*

EXERCICE 2 (5 points)

Une urne U_1 contient six boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et trois boules numérotées 2.

Une autre urne U_2 contient cinq boules : deux boules numérotées 0, une boule numérotée 1 et deux boules numérotées 2.

Les boules sont indiscernables au toucher.

1°) On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne U_1.

Calculer les probabilités des événements suivants :

A: << La somme des numéros notés est égale à 4>> ***(0,5pt)***

B: << Parmi les trois boules tirées, deux boules exactement sont numérotées par 2>> ***(0,5pt)***

C: << Le produit des numéros notés sur les trois boules tirées, est différent de 0 >> ***(0,5pt)***

D: << Les trois boules obtenues portent le même numéro >> ***(0,5pt)***

2°) On remet l'urne U_1 à sa condition initiale. On tire une boule de l'urne U_1 , puis on tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne U_2. On suppose que les événements élémentaires sont équiprobables. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque éventualité, associe le produit des numéros notés sur les trois boules obtenues.

a/ Vérifier que l'univers image de X est égal à l'ensemble $\{ 0 , 2, 4, 8 \}$. ***(0,5pt)***

b/ Montrer que $P(X = 0) = \frac{3}{4}$ et $P(X \geq 4) = \frac{11}{60}$. ***(0,25+0,5pt)***

c/ Calculer la probabilité de l'événement : $(X = 2)$. ***(0,25pt)***

d/ Compléter le tableau des valeurs ci-dessous : ***(0,25+0,25pt)***

k	0	2	4	8
P (X= k)				

e/ Montrer que $E(X) = \frac{16}{15}$, E(X) étant l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. ***(0,25pt)***

f/ Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition F de X.

On utilisera pour la représentation graphique de F un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(On prendra comme unités : 1cm sur l'axe des abscisses et 6cm sur l'axe des ordonnées) ***(0,25+0,5pt)***

(**N.B** : On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible).

PROBLEME (10 points)

Soit la fonction numérique f définie sur l'intervalle] 0, + [par : $f(x) = e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$

On note par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2cm).

1°) On donne la fonction numérique g définie sur l'intervalle] 0, +∞ [par : $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$

a/ Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ ***(0,25+0,25)***

b/ Pour tout x > 0, calculer g'(x) et étudier son signe. ***(1+0,5pt)***

c/ Dresser le tableau de variation de g. ***(1pt)***

d/ Montrer qu'il existe un et un seul nombre réel α vérifiant g (α) = 0 avec $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ ***(1pt)***

2°) a/ Pour tout x > 0, calculer f ' (x). ***(0,5pt)***

b/ Pour tout x > 0, montrer l'égalité f '(x) = $e^x g(x)$. ***(0,5pt)***

c/ Calculer f ' ((α)). ***(0,25pt)***

d/ Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ $\left(\text{On pourra utiliser l'égalité } f(x) = \frac{e^x}{x}(x \ln x + 1)\right)$. ***(0,25+0,25)***

e/ Dresser le tableau de variation de la fonction f. ***(0,75pt)***

3°) a/ Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1. *(0,5pt)*

b/ Construire (C) et (T) dans un même repère. *(1+0,5pt)*

4°) On pose pour tout $x > 0$, $h(x) = e^x \ln x$

Montrer que h est une primitive de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$. *(0,5pt)*

5°) Soit $I = \int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx$ où α est le réel défini à la question 1°) d/

a/ Montrer que $I = e^{\alpha}\left(\frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right)$. *(0,5pt)*

b/ Interpréter géométriquement l'intégral I. *(0,5pt)*

On donne $\ln 2 \simeq 0,7$ $\alpha \simeq 0,6$ $f(\alpha) \simeq 2,1$ $e \simeq 2,7$